



PROPORTIONNALITE CYCLE 3

**ANIMATION PEDAGOGIQUE
VOIRON 1 - 2019/2020**



1 – CHAMP NOTIONNEL

Comment définissez-vous une situation de proportionnalité ?

- Un problème est appelé « problème de proportionnalité » si deux grandeurs (quantités, prix, longueurs, masses...) sont en relation l'une avec l'autre et si, lorsque l'une est doublée, triplée..., l'autre est également doublée, triplée...

Cycle 3

Deux grandeurs (*ou deux suites de nombres*) sont dites proportionnelles si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre non nul . Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

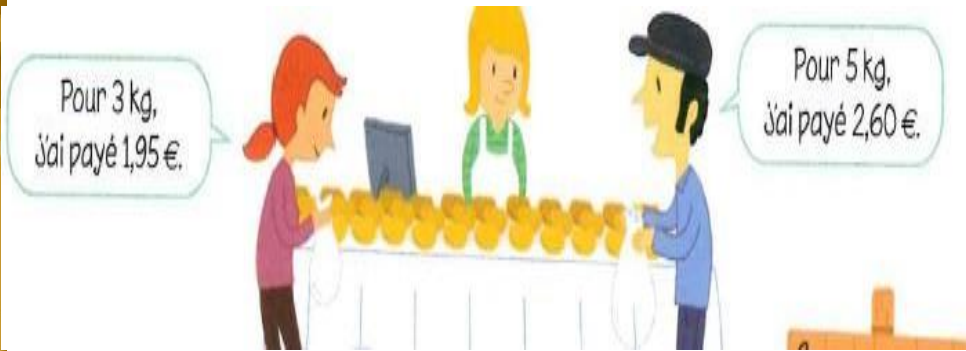
Poires (kg)	2	10	15	20	2,5	7,5
Prix (€)	3,2	16	24	32	4	12

Attention

- Concernant les quantités discrètes on parlera de 2 suites proportionnelles de nombres et non pas de 2 nombres proportionnels (en effet, dans ce cas, toute paire de nombre est « proportionnelle » car on trouvera toujours un coefficient multiplicateur pour passer de l'un à l'autre).
- Pour les grandeurs continues comme les vitesses, on pourra parler de 2 grandeurs proportionnelles (distance proportionnelle au temps à vitesse constante car $d = v \text{ fois } t$)

Situations proportionnelles ou non ?

Situation 1



Situation 2

a.

Poires (kg)	2	10	15	20	2,5	7,5
Prix (€)	3,2	16	24	32	4	12

b.

Temps de marche (en min)	60	90	120	30	150
Distance (en km)	6	12	15	3	18

Situation 3

Arthur fait le tour du lac en courant.
Il fait les premiers 200 mètres en 3 minutes.
On peut en déduire qu'il fera le tour du lac en 15 min.

Tour du lac : 1 km

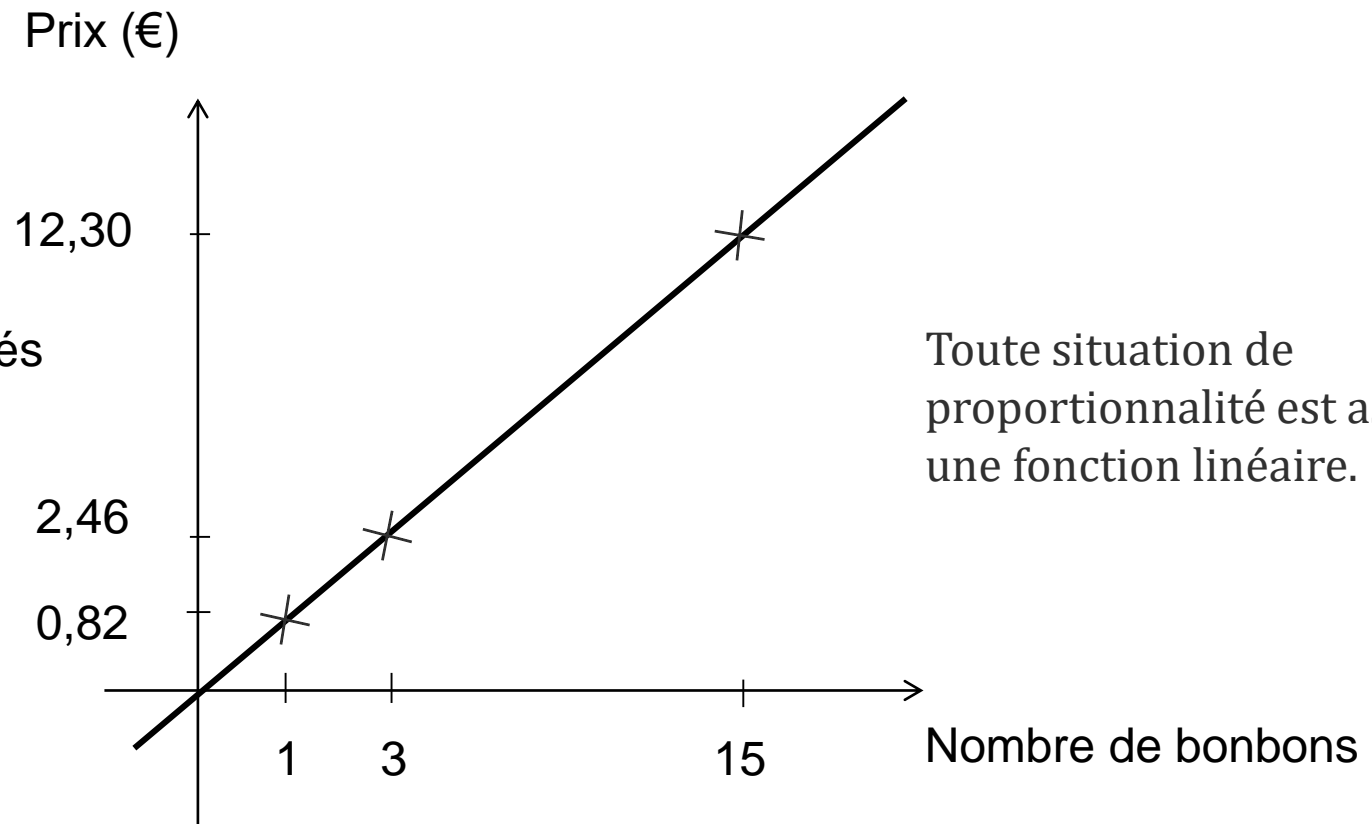
Cadre fonctionnel et cadre graphique

Nombre de bonbons	3	15	1
Prix à payer	2,46	12,30	0,82

× 0,82

$$Y = f(x) = 0,82X$$

Les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine...



Toute situation de proportionnalité est associée à une fonction linéaire.

Mise en situation 1

Chaque binôme résout 4 énoncés de problèmes de proportionnalité :

« Résolvez chacun des problèmes puis classez les selon leur niveau de difficulté en justifiant votre choix »

« Quelles sont vos procédures « réflexes »? Y-en a-t-il d'autres?
Quelles propriétés mathématiques utilisez-vous?

Sachant que 4 stylos valent 2 euros,
combien valent 8 stylos?

*rapport interne simple
rapport externe simple*

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros,
combien valent 8 stylos?

→ Utilisation des propriétés de linéarité (multiplication par un scalaire sans unité)

*rapport interne simple
rapport externe complexe*

Sachant que 4 stylos valent 2 euros,
combien valent 14 stylos?

→ Utilisation du coefficient de proportionnalité (unité euros/stylo)

*rapport interne complexe
rapport externe simple*

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros,
combien valent 14 stylos?

*rapport interne complexe
rapport externe complexe*

Rapports interne, rapport externe....

Le rapport interne (rapport scalaire) est le rapport qu'il y a entre les nombres, les mesures d'une même grandeur, dans la même unité.

Le rapport externe (opérateur) est le rapport dans un couple de données se correspondant, c'est le coefficient de proportionnalité.

Si le rapport externe est simple on aura tendance à l'utiliser, cela va influencer une procédure plutôt basée sur le coefficient de proportionnalité (*)

Si le rapport interne est simple, on aura tendance à l'utiliser, c'est-à-dire utiliser les relations de linéarité : propriété additive et multiplicative.

(*) Dans le cas où les grandeurs sont de nature différente, le coefficient de proportionnalité est une grandeur quotient dont l'unité est composé des 2 unités en présence (euro/l; km/h; kg/l... Dans le cas où les grandeurs liées par une relation de proportionnalité sont de même nature (échelle, coefficient d'agrandissement...) le coefficient de proportionnalité est une grandeur sans unité.

Propriétés de linéarité qui sous-tendent les calculs sur la proportionnalité

- **Propriété de linéarité pour l'addition** : $f(a + b) = f(a) + f(b)$: le prix « de a et b » sucettes est égal au prix de « a » sucettes + le prix de « b » sucettes. [*illustration*](#)
- **Propriété de linéarité pour la multiplication**: $f(3a) = 3f(a)$: le prix de 3 fois « a » sucettes est égal à 3 fois le prix de « a » sucettes. [*Illustration*](#)
- **Propriété mixte alliant les 2 précédentes** : $f(3a + 3b) = 3f(a) + 3f(b)$: le prix de 3 fois « a » sucettes et 3 fois « b » carambars est égal à 3 fois le prix de « a » sucettes et de 3 fois le prix de « b » carambars. [*Illustration*](#)

Les propriétés de linéarité s'utilisent dans des rapports internes : Si le prix de 3 sucettes est 5 euros alors le prix de 3x2 sucettes est 5x 2 euros.

Une des valeurs est 1

1	3	4	32	1	8
8	?	1	?	?	56

multiplication

division partition

division quotient

- Dans une boîte, il y a 8 feutres, combien de feutres dans 3 boîtes ?
- Je répartis mes 32 feutres équitablement dans 4 boîtes identiques, combien de feutres je dois mettre dans chaque boîte ?
- Dans une boîte, il y a 8 feutres, je dois ranger 56 feutres. De combien de boîtes ai-je besoin ? ?

Partition et quotition

3 pirates se partagent 15 pièces d'or. Combien pour chaque pirate? → partage → partition (valeur de la part)

15 pièces d'or sont partagés équitablement entre des pirates. Chaque pirate reçoit 5 pièces d'or. Combien y a-t-il de pirates? → groupement → quotition (nombre de parts)

Les 4 situations de proportionnalité simples sont donc :

- La multiplication
- La division partition
- La division quotition
- La proportionnalité avec recherche d'une quatrième proportionnelle = nombre manquant à calculer.

La proportionnalité double fait intervenir deux situations de proportionnalité. Une usine produit 500 voitures /heure. Combien de voitures produit-elle par jour puis par semaine?

PROCEDURES :

1. L'utilisation des propriétés de linéarité (rapport interne) :
2. La recherche de la « valeur de l'unité » (rapport interne)
3. L'utilisation du « coefficient » de proportionnalité (rapport externe)

3	9
9	?

1

3	9
7	?
1	?

2

3	9
9	?

3

4. La règle de 3 ou produit en croix

Remarques sur le coefficient de proportionnalité:

Le coefficient de proportionnalité n'est pas toujours une fraction (exemple relation périmètre P /diamètre d par la relation $P = \pi \times d$, π coefficient de proportionnalité est irrationnel). Ou la relation entre le côté d'un carré et sa diagonale avec un rapport de $\sqrt{2}$: $d = a \times \sqrt{2}$ (Pythagore)

Un rapport n'est donc pas nécessairement une fraction (qui représente un nombre rationnel de la forme a/b avec a et b entiers naturels, b non nul)

Ressources capsules Canopé

Vidéos : capsules Canopé « [Découvrir](#) la proportionnalité », « [Reconnaitre](#) une situation de proportionnalité », « [Proportionnalité](#) et échelles », « Proportionnalité et [pourcentages](#) ».

Mise en situation 2

A partir de productions d'élèves (avec résultats corrects), en binôme ou trinôme, repérer les différentes procédures utilisées : **merci de ne pas écrire sur les documents**

1. Linéarité de l'addition
2. Linéarité de la multiplication
3. Procédure mixte (linéarité de l'addition et de la multiplication)
4. Procédure de passage à l'unité
5. Coefficient de proportionnalité

Situation 2 : mise en commun

Exercice 1

Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 24 personnes ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

élève A

Pour 24 personnes il faut ~~24~~ œufs.
16

~~Il faut faire une division~~ Il faut faire des additions
 $9 + 15 = 24$ $10 + 6 = 16$

élève B

9 pers } 6 œufs
15 pers } 10 œufs
24 pers } 16 œufs

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 6 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 9 \\ \hline 24 \end{array}$$

Il faut 16 œufs pour 24 personnes

Linéarité pour l'addition, procédure induite par l'énoncé.

Une seule donnée aurait suffi, mais alors une autre procédure aurait été nécessaire.

Situation 2 : mise en commun

Exercice 2

Un livre de cuisine indique que, pour faire une mousse au chocolat, il faut : 6 œufs si la recette est prévue pour 9 personnes et 10 œufs si la recette est prévue pour 15 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 6 personnes ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

élève C → Linéarité pour l'addition. Sans l'écrire, il a vu que 15 personnes - 9 personnes = 6 personnes. Procédure induite par l'énoncé. Une seule des deux données aurait suffi, en recourant à une autre procédure.

$$10 - 6 = 4$$

Il faut prévoir 4 œufs

élève D → Utilisation à plusieurs reprises de la linéarité pour la multiplication par un nombre. N'a pas utilisé la relation 6 œufs → 9 personnes mais a tiré de celle 10 œufs → 15 personnes qu'il fallait un œuf pour 1,5 personnes en utilisant ses connaissances sur les nombres décimaux. Puis en multipliant deux fois de suite par 2 pour passer de 1,5 à 6 personnes pour trouver le résultat.

10 œufs → 15 pers
6 œufs → 9 pers.
? → 6 pers.
1 œuf → 1,5 personne
2 œufs → 3 pers.
4 œufs → 6 pers.

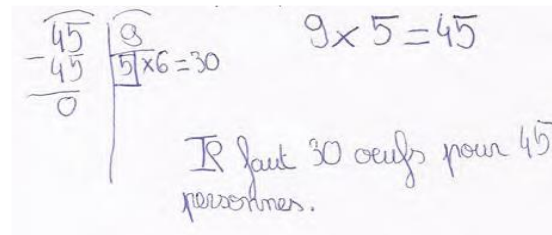
Situation 2 : mise en commun

Exercice 3

Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 45 personnes ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Élève E → Linéarité pour la multiplication par un nombre. Cet exercice peut se traiter dès le cycle 2 comme un exercice de multiplication, sans parler de proportionnalité.



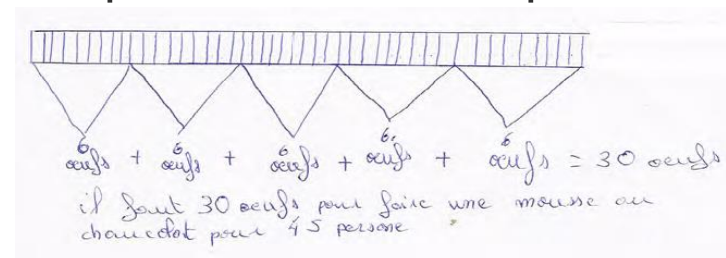
$$\begin{array}{r} 45 \\ -45 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \times 6 = 30 \end{array}$$

$9 \times 5 = 45$

Il faut 30 œufs pour 45 personnes.

Élève F → Linéarité pour l'addition, addition répétée proche de la multiplication



$$6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} + 6 \text{ œufs} = 30 \text{ œufs}$$

il faut 30 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 45 personnes.

Situation 2 : mise en commun

Exercice 4

Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 9 personnes

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 3 personnes ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin

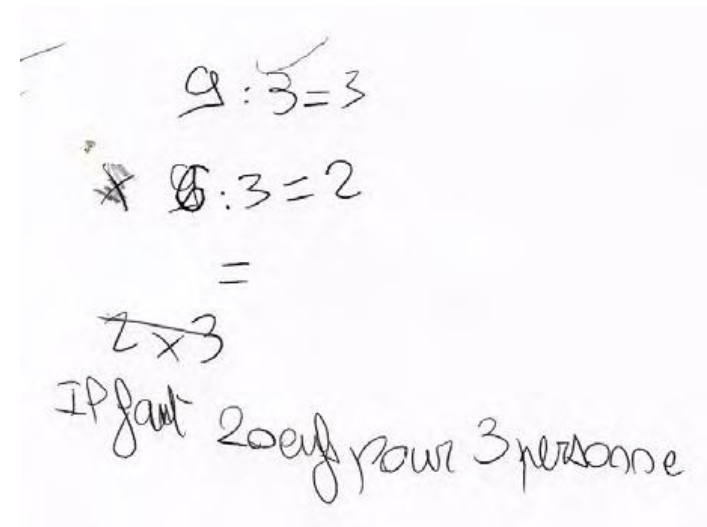
Élève G



$$\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ -6 & \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Comme on a besoin d'œufs pour 3 personnes au lieu de 9 il faut 3 fois moins.
Donc 2.

Élève H



$$\begin{array}{r} 9 : 3 = 3 \\ * 6 : 3 = 2 \\ = \\ 2 \times 3 \\ \text{Il faut 2 œufs pour 3 personnes} \end{array}$$

Linéarité pour la multiplication par un nombre.

Situation 2 : mise en commun

Exercice 5

Il faut 6 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes.

Combien dois-je prévoir d'œufs si je veux faire cette mousse au chocolat pour 15 personnes ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Élève I

5 est la moitié de dix 3 est la moitié de 6

- Si pour 10 personnes il me faut 6 œufs alors pour 15 personnes il me faudra 9 œufs car les 3 œufs représentent les 5 personnes que on a rajouté à 10.

$$\begin{array}{r} +36 \\ 36 \\ \hline 9 \end{array}$$

Elève K

6 œuf pour 10 personnes
? œuf pour 15 personnes

$$3 + 3 + 3 = 9$$

↑
œuf

il faut 9 œuf pour 15 personnes.

Procédure mixte : d'abord, linéarité pour la multiplication par un nombre, en divisant par 2 pour passer de 10 à 5, puis linéarité pour l'addition en ajoutant la valeur correspondant à 10 personnes et celle correspondant à 5 personnes pour trouver la valeur à 15 personnes.

Pour K, idem , utilisant le fait que 15 est le triple de 5.

Situation 2 : mise en commun

Exercice 6

Il faut 5 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes. J'ai 3 œufs. Pour combien de personnes puis-je faire une mousse au chocolat ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Élève L et élève M → retour à l'unité

1 œuf = 2 personnes. $3 \times 2 = 6$

On peut faire une mousse au chocolat pour 6 personnes.

5 œufs = 10 personnes

donc

1 œuf = 2 personnes

$\times \frac{3}{6}$

donc

3 œufs = 6

Pour ce pourrais faire une mousse pour 6 personnes.

Élève N → Division, le résultat 2 a alors un statut de coefficient de proportionnalité, l'unité à expliciter étant personnes/œuf.

Sans unité, on ne peut savoir si le raisonnement utilise le passage à l'unité ou bien le calcul du coefficient de proportionnalité.

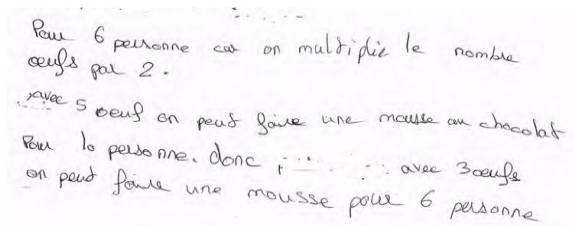
① $\frac{10}{5} = \frac{15}{3}$
 $\frac{10}{5} = 2$
 $3 \times 2 = 6$
Avec 3 œufs on peut faire une mousse au chocolat pour 6 personnes

Situation 2 : mise en commun

Exercice 6

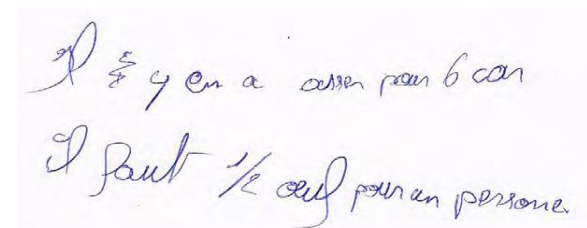
Il faut 5 œufs pour faire une mousse au chocolat pour 10 personnes. J'ai 3 œufs. Pour combien de personnes puis-je faire une mousse au chocolat ? J'ai chez moi tout le chocolat dont j'ai besoin.

Élève O



Pour 6 personnes car on multiplie le nombre œufs par 2.
avec 5 œufs on peut faire une mousse au chocolat pour 10 personnes. donc avec 3 œufs on peut faire une mousse pour 6 personnes.

Elève P



Il faut $\frac{5}{10}$ en a assez pour 6 car
Il faut $\frac{1}{2}$ œuf pour un personne.

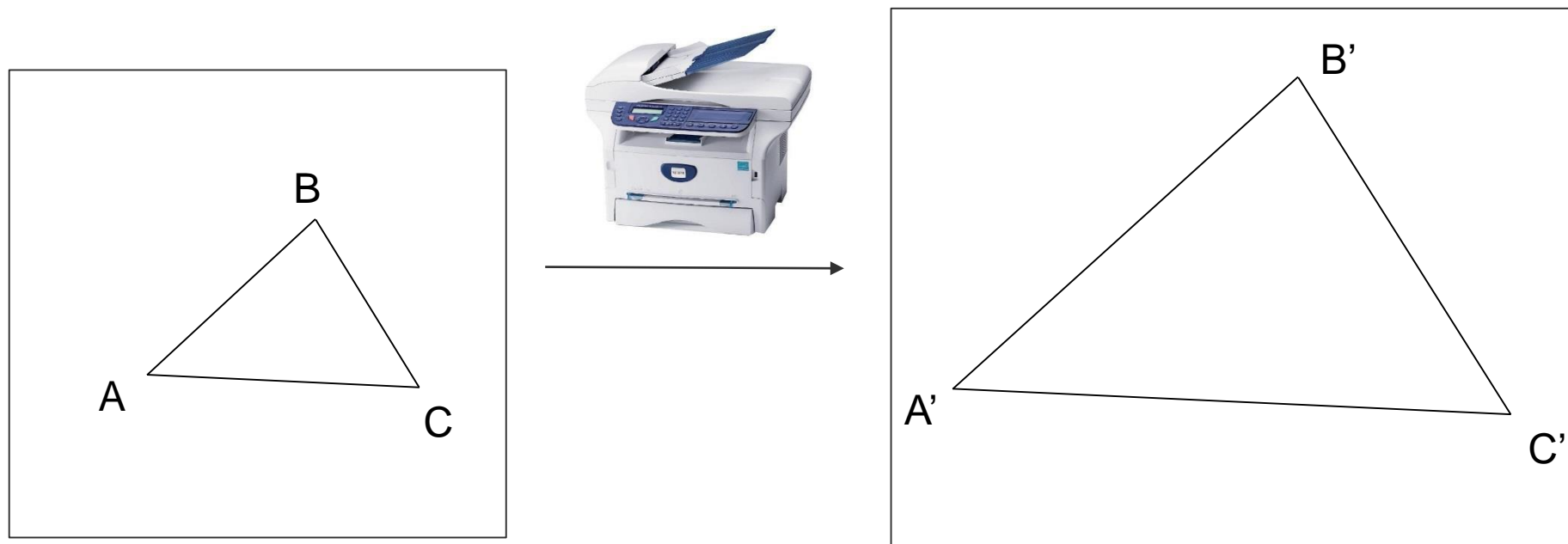
O → Procédure moins explicite. Mais 2 apparaît comme le nombre par lequel il faut multiplier « 3 œufs » pour trouver « 6 personnes ».

P → Linéarité pour la multiplication en divisant d'abord par 10 pour trouver qu'il fallait $\frac{1}{2}$ œuf pour 1 personne, puis en multipliant par 6.

Proportionnalité en géométrie

Agrandissement – réduction

Doc. eduscol



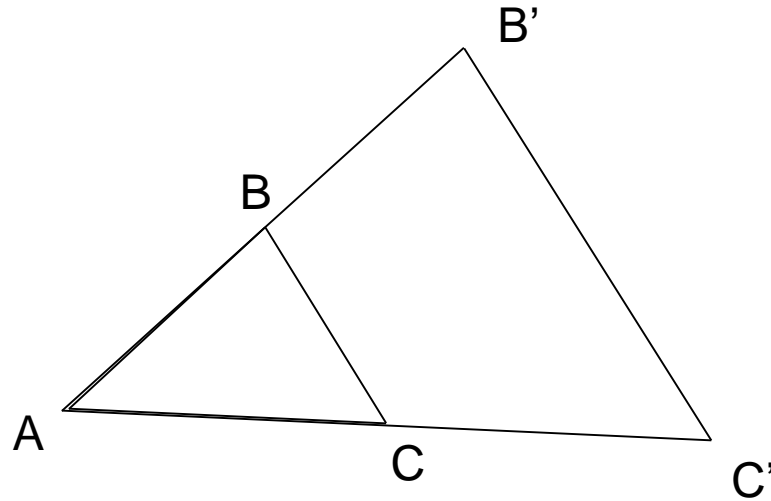
Il s'agit d'agrandissement – réduction d'image géométrique (triangles homothétiques)

Par exemple, je trace sur feuille blanche un triangle ABC et je fais passer ce dessin à la photocopieuse avec un certain coefficient d'agrandissement. Par superposition par exemple, on peut voir que les angles se superposent et on voit rapidement que les mesures des longueurs des côtés sont proportionnelles (le coefficient de proportionnalité étant le coefficient d'agrandissement).

Remarque : si le coefficient d'agrandissement est k alors le périmètre augmentera de k mais l'aire augmentera de k fois k .

Proportionnalité en géométrie

THALES



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

On fait glisser les deux triangles l'un sur l'autre en faisant se correspondre les angles en A. Le rapport des longueurs correspond au coefficient de réduction ou d'agrandissement.